Slučajne varijable

Slučajne varijable

Često se dešava da u sprovođenju nekog eksperimenta naš glavni interes su neke f-je izlaza, a ne konkretno sam izlaz. Na primjer, u bacanju dvije kockice, obično nas zanima suma dvije kockice i često nismo opterećeni na pojedinačne izlaze kockica. Tj. zanima nas da li je suma sedam a uopšte nam nije bitno da li je izlaz bio (1,6) ili (2,5) ili (3,4) ili (4,3) ili (5,2) ili (6,1). Ove količine interesa, ili formalnije, ove realno vrijednosne f-je definisane na prostoru uzoraka, su poznate kao slučajne varijable.

Kako je vrijednost slučajne varijable određena izlazom eksperimenta, vjerovatnoće možemo pridružiti mogućoj vrijednosti slučajne varijable.

Posmatrajmo eksperiment bacanja dvije obične kockice. Neka X označava slučajnu varijablu koja je definisana kao suma dvije kockice. Drugim riječima slučajna varijabla X može uzeti bilo koji cijeli broj između dva i dvanaest. Izračunati $P\{X=1\}$, $P\{X=2\}$, $P\{X=3\}$, $P\{X=4\}$, $P\{X=5\}$, ..., $P\{X=12\}$, $\sum_{n=2}^{12} P\{X=n\}$.

Rj.

$$P\{X=2\} = P\{(1,1)\} = \frac{1}{36}$$

$$P\{X=3\} = P\{(1,2),(2,1)\} = \frac{2}{36}$$

$$P\{X=4\} = P\{(1,3),(2,2),(3,1)\} = \frac{3}{36}$$

$$P\{X=5\} = P\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} = \frac{4}{36}$$

$$P\{X=6\} = P\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} = \frac{5}{36}$$

$$P\{X=7\} = P\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} = \frac{6}{36}$$

$$P\{X=8\} = P\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} = \frac{5}{36}$$

$$P\{X=9\} = P\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} = \frac{4}{36}$$

$$P\{X=10\} = P\{(4,6),(5,5),(6,4)\} = \frac{3}{36}$$

$$P\{X=11\} = P\{(5,6),(6,5)\} = \frac{2}{36}$$

$$P\{X=12\} = P\{(6,6)\} = \frac{1}{36}$$

$$\sum_{n=2}^{12} P\{X=n\} = P\{X=1\} + P\{X=2\} + \dots + P\{X=12\} = 1$$

\# Posmatrajmo eksperiment bacanja dva obična novčića. Neka Y označava broj glava koje se pojave u eksperimentu. Izračunati $P\{Y=0\}$, $P\{Y=1\}$, $P\{Y=2\}$, $P\{Y=3\}$, $P\{Y=4\}$.

Rj.

Y je slučajna varijabla koja može uzimati vrijednosti 0, 1 i 2. Imamo

T - pismo, H - glava

$$P\{Y=0\} = P\{(T,T)\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{Y=1\} = P\{(T,H),(H,T)\} = \frac{2}{4}$$

$$P\{Y=2\} = P\{(H,H)\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{Y=3\} = 0$$

$$P\{Y=4\} = 0$$

Naravno, vrijedi $P\{Y=0\} + P\{Y=1\} + P\{Y=2\} = 1$.

Posmatrajmo eksperiment bacanja jednog novčića čija je vjerovatnoća pojave glave jednaka p, sve dok se prva glava ne pojavi. Neka je N slučajna varijabla koja označava broj potrebnih bacanja novčića sve dok se prva glava ne pojavi i pretpostavimo da su izlazi uzastopnih bacanja novčića nezavisni. Izračunati $P\{N=1\}, P\{N=2\}, P\{N=3\}, \ldots, P\{N=n\}, P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{N=n\}\right)$.

Rj. $P\{N=1\} = P\{H\} = p$ H-glava, T-pismo

$P\{N=2\} = P\{(T,H)\} = (1-p)p$

$P\{N=3\} = P\{(T,T,H)\} = (1-p)^2 p$

$\vdots$

$$P\{N=n\} = P\{(\underbrace{T,T,\ldots,T}_{n-1},H)\} = (1-p)^{n-1}p, \quad n \geq 1$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{N=n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N=n\} = p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}$$

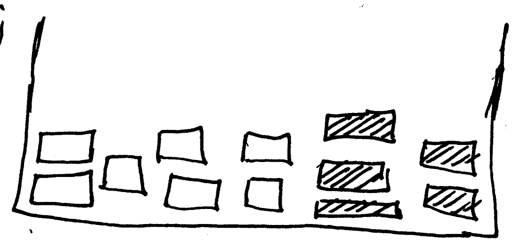
$$= \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

(#) Skup se sastoji od 7 dobrih i 5 defektnih proizvoda. Iz tog skupa uzmemo najednom tri proizvoda.

(a) Kolika je vjerovatnoća da će bar jedan od njih biti defektan?

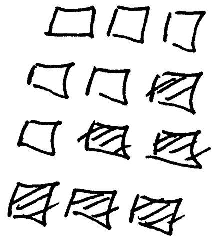
(b) Kolika je vjerovatnoća da će svi izvučeni proizvodi biti dobri?

Rj



Uzimamo tri proizvoda

dobri proizvodi	defektni proizvodi
3	0
2	1
1	2
0	3



Ako sve proizvode u skupu označimo različitim bojama – na koliko načina možemo izvući tri različita proizvoda?

kombinacija bez ponavljanja $n=12,\ k=3$ $\quad C_k^n = \binom{n}{k} = \binom{12}{3} = \dfrac{\cancel{12}^{4}\cdot 11\cdot \cancel{10}^{5}}{1\cdot \cancel{2}_1\cdot \cancel{3}_1} = 220$

Na 220 načina možemo izvući tri različita proizvoda.

Neka je X slučajna promjenjiva koja registruje broj defektnih proizvoda u uzorku od 3 proizvoda koji je izvučen iz osnovnog skupa koji ima 12 proizvoda od kojih je 5 defektno. Tada

$$P\{X=0\} = \frac{\binom{7}{3}}{220} = \frac{\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 1}}{220} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44} \approx 0{,}15909$$

$$P\{X=1\} = \frac{\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{1}}{220} = \frac{\frac{7\cdot\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}}\cdot 5}{220} = \frac{105}{220} = \frac{21}{44}$$

$$P\{X=2\} = \frac{\binom{7}{1}\cdot\binom{5}{2}}{220} = \frac{7\cdot\frac{5\cdot\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\cdot 1}}{220} = \frac{70}{220} = \frac{14}{44}$$

$$P\{X=3\} = \frac{\binom{5}{3}}{220} = \frac{\frac{5\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3}}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}}{220} = \frac{10}{220} = \frac{2}{44}$$

Primjetimo da je $\sum_{i=0}^{3} P\{X=i\} = 1$

Prema tome:

(a)

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X<1\} = 1 - P\{X=0\} =$$
$$= 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44} \approx 0,8409$$

$$P\{X \geq 1\} = P\{X=1\} + P\{X=2\} + P\{X=3\} =$$
$$= \frac{21+14+2}{44} = \frac{37}{44} \approx 0,8409$$

(b)

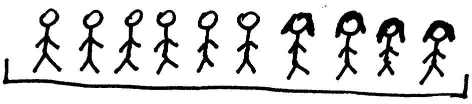
$$P\{X=0\} = \frac{7}{44} \approx 0,16$$

(#) Među 10 prijavljenih kandidata na konkurs za 4 radna mjesta prijavile su se 4 žene. Pod uslovom da se izbor vrši na slučajan način, kolika je vjerovatnoća:

(a) da neće biti izabrana nijedna žena?

(b) da će biti izabrana bar jedna žena?

Rj.



Ako sve osobe označimo drugačije (npr. drugačijom bojom), na koliko načina možemo izabrati četri različite osobe?

$$C_4^{10} = \binom{10}{4} = \frac{10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \cancel{8}\cdot 7}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot 1} = 210$$

Neka je X slučajna promjenjiva koja registruje broj žena izabranih za 4 radna mjesta iz skupa od 10 kandidata, među kojima su 4 žene.

$$P\{X=0\} = \frac{\binom{6}{4}}{210} = \frac{\binom{6}{2}}{210} = \frac{\frac{6\cdot 5}{2}}{210} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$$

$$P\{X=1\} = \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{1}}{210} = \frac{\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4}{210} = \frac{80}{210}$$

$$P\{X=2\} = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{210} = \frac{\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}}{210} = \frac{90}{210}$$

$$P\{X=4\} = \frac{\binom{4}{4}}{210} = \frac{1}{210}$$

$$P\{X=3\} = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{3}}{210} = \frac{6\cdot 4}{210} = \frac{24}{210}$$

(a) $P\{X=0\} = \frac{1}{14}$

(b) $P\{X\geq 1\} = 1 - P\{X=0\} = \frac{13}{14}$

ili $P\{X \geq 1\} =$
$= P\{X=1\} + P\{X=2\} +$
$+ P\{X=3\} + P\{X=4\}$

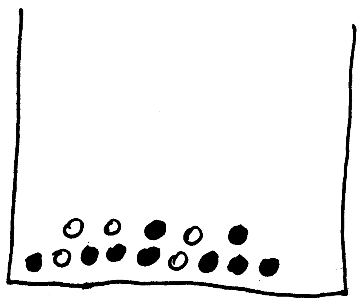
U jednom šeširu se nalazi 9 crnih i 5 bijelih kuglica.

(a) Kolika je vjerovatnoća da među 4 slučajno izvučene kuglice ne bude nijedna bijela?

(b) Kolika je vjerovatnoća da od 4 izvučene kuglice budu tačno 3 crne?

(c) Kolika je vjerovatnoća da među 4 izvučene kuglice bude bar jedna crna?

Rj.



U šeširu se ukupno nalazi 14 kuglica. Ako sve kuglice označimo drugačije tada postoji $\binom{14}{4}$ različitih skupova od po 4 različite kuglice.

$$\binom{14}{4} = \frac{\overset{7}{\cancel{14}} \cdot 13 \cdot \overset{1}{\cancel{12}} \cdot 11}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \underset{1}{\cancel{4}}} = 1001$$

Neka je X slučajna promjenjiva koja registruje broj izvučenih crnih kuglica među 4 izvučene kuglice iz skupa od 14 kuglica (9 crnih i 5 bijelih)

(a) $$P\{X = 4\} = \frac{\binom{9}{4}}{1001} = \frac{\frac{9 \cdot \overset{2}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot \overset{1}{\cancel{6}}}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}}}{1001} = \frac{126}{1001} \approx 0{,}1259 \approx 12{,}6\%$$

(b) $$P\{X = 3\} = \frac{\binom{9}{3}\binom{5}{1}}{1001} = \frac{\frac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot 7}{\cancel{12} \cdot \cancel{3}} \cdot 5}{1001} = \frac{420}{1001} \approx 0{,}4196 \approx 42\%$$

(c) $$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X < 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - \frac{\binom{5}{4}}{1001} =$$

$$= 1 - \frac{5}{1001} \approx 0{,}9950 \approx 99{,}5\%$$

Diskretne slučajne varijable

Za slučajnu varijablu koja može uzeti najviše prebrojivo mnogo mogućih vrijednosti kažemo da je diskretna. Za diskretnu slučajnu varijablu X, definišemo f-ju gustine vjerovatnoće $p(a)$ od X sa

$$p(a) = P\{X = a\}$$

F-ja gustine vjerovatnoće $p(a)$ je pozitivna za najviše prebrojivo mnogo vrijednosti a. Tj., ako za X moramo pretpostaviti jednu od vrijednosti $x_1, x_2, \ldots$, tada

$$p(x_i) > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

$$p(x) = 0, \qquad \text{za sve ostale vrijednosti od } x$$

Kako X mora uzeti jednu od vrijednosti x_i, imamo

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

Kumulativa f-je distribucije F se može izraziti po članovima od $p(a)$ sa

$$F(a) = \sum_{\text{sve } x_i \leq a} p(x_i)$$

Na primjer, pretpostavimo da X ima f-ju gustine vjerovatnoće datu sa

$$p(1) = \frac{1}{2}, \qquad p(2) = \frac{1}{3}, \qquad p_3 = \frac{1}{6} \; .$$

Slučajne promenljive diskretnog tipa

Skup svih mogućih ishoda jednog verovatnosnog eksperimenta je Ω. **Slučajna promenljiva** X predstavlja merljivu funkciju koja preslikava skup Ω u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Skup slika od X označavamo sa $\mathcal{R}_X$ i zovemo **skup vrednosti** slučajne promenljive X.

Slučajna promenljiva je **diskretnog** tipa ako je skup vrednosti konačan ili prebrojiv. Tada ga možemo predstaviti u obliku $\mathcal{R}_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Sa $\mathsf{p}(x_i)$ obeležavamo verovatnoću događaja čiji se elementi preslikavaju u x_i, tj.

$$\mathsf{p}(x_i) = \mathsf{P}(X = x_i) = \mathsf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}), \tag{2.1}$$

pri čemu važi da je

$$\sum_i \mathsf{p}(x_i) = \sum_i \mathsf{P}\left(X = x_i\right) = 1. \tag{2.2}$$

Skup vrednosti diskretne slučajne promenljive $\mathcal{R}_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ zajedno sa odgovarajućim verovatnoćama $\mathsf{p}(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ predstavlja **zakon raspodele** slučajne promenljive X. Zakon raspodele slučajne promenljive X najčešće predstavljamo šematski

$$X : \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ \mathsf{p}(x_1) & \mathsf{p}(x_2) & \ldots & \mathsf{p}(x_n) & \ldots \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Funkciju raspodele slučajne promenljive X označavamo sa $F_X\left(x\right)$, $x \in \mathbb{R}$ i definišemo sa

$$F_X\left(x\right) = \mathsf{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} = \mathsf{P}\left(X < x\right) = \sum_{i:\ x_i < x} \mathsf{p}(x_i). \tag{2.4}$$

Slučajna promenljiva X ima **binomnu** $\mathcal{B}(n, p)$ raspodelu sa parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $0 < p < 1$ ako je njen skup vrednosti $\mathcal{R}_X = \{0, 1, \ldots, n\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$$\mathsf{p}(i) = \mathsf{P}(X = i) = \tbinom{n}{i} p^i q^{n-i}, \tag{2.5}$$

gde je $i \in \mathcal{R}_X$, $q = 1 - p$.

Slučajna promenljiva X ima **Poasonovu** (*Poisson*) $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodelu sa parametrom $\lambda > 0$, ako je $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ njen skup vrednosti i za $i \in \mathcal{R}_X$ važi

$$\mathsf{p}(i) = \mathsf{P}\left(X = i\right) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}. \tag{2.6}$$

Slučajna promenljiva X ima **geometrijsku** $\mathcal{G}(p)$ raspodelu sa parametrom $0 < p < 1$ ako je njen skup vrednosti $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$, a odgovarajuće verovatnoće su date sa

$$\mathsf{p}(i) = \mathsf{P}\left(X = i\right) = q^{i-1} p, \tag{2.7}$$

za $i \in \mathcal{R}_X$, $q = 1 - p$.

Ako slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(n, p)$ raspodelu i $n \to \infty$, a $p \to 0$ i $np \to \lambda = const$, tada

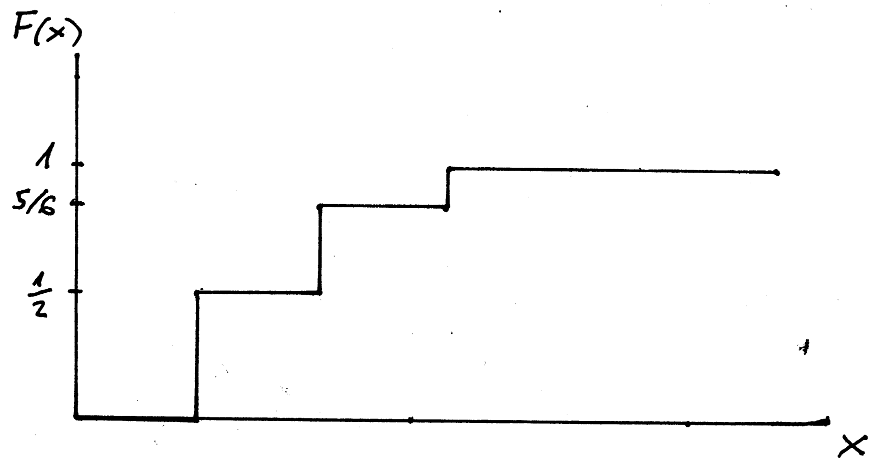
$$\binom{n}{i}\ p^i\ q^{n-i} \to \frac{\lambda^i}{i!}\ e^{-\lambda}, \tag{2.8}$$

tj. verovatnoće koje odgovaraju binomnoj raspodeli konvergiraju ka verovatnoćama koje odgovaraju Poasonovoj raspodeli.

Tada kumulativna f-ja distribucije F od X je data sa

$$F(a) = \begin{cases} 0, & a<1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq a < 2 \\ \frac{5}{6}, & 2 \leq a < 3 \\ 1, & 3 \leq a \end{cases}$$

Ovo je grafički predstavljeno na sljedećoj slici



Graf f-je $F(x)$

Diskretne slučajne varijable se često dijele prema njihovim f-jama gustine vjerovatnoće:

- Bernulijeva slučajna varijabla
- Binomna slučajna varijabla
- Geometriska slučajna varijabla
- Poissonova slučajna varijabla

Bernoulli-jeva slučajna varijabla

Pretpostavimo da posmatramo eksperiment čiji izlaz se može klasifikovati ili kao "uspjeh" ili kao "neuspjeh". Ako stavimo da je X jednak 1 ako je izlaz uspjeh i 0 ako je neuspjeh, tada je f-ja gustine vjerovatnoće od X data sa

$$p(0) = P\{X = 0\} = 1 - p$$
$$p(1) = P\{X = 1\} = p \qquad \ldots (*)$$

gdje je p, $0 \le p \le 1$, vjerovatnoća da ishod eksperimenta bude "uspješan".

Za slučajnu varijablu X kažemo da je Bernulijeva slučajna varijabla ako je njena f-ja gustine vjerovatnoće data jednakostima sa $(*)$ za neko $p \in (0,1)$.

Binomna slučajna varijabla

Pretpostavimo da se n nezavisnih ishoda, koji kao rezultat mogu biti "uspješni" sa vjerovatnoćom p i "neuspješni" sa vjerovatnoćom $1-p$, treba dogoditi. Ako X predstavlja broj uspješnih ishoda od n mogućih, tada za X kažemo da je binomna slučajna varijabla sa parametrima (n,p).

F-ja gustine vjerovatnoće binomne slučajne varijable sa parametrima (n,p) je data sa

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n \qquad \ldots (\Delta)$$

gdje je

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)! \cdot i!}$$

jednako broju različitih grupa od po i objekata koji se mogu izabrati iz skupa od po n objekata. Tačnost jednakosti (Δ) se može provjeriti tako što ćemo prvo primjetiti da je vjerovatnoća od bilo kojeg niza od n izlaza koji sadrže i uspješnih i $n-i$ neuspješnih, pretpostavljajući da su ishodi nezavisni, jednak $p^i (1-p)^{n-i}$. Jednakost (Δ) tada slijedi zato što postoji $\binom{n}{i}$ različitih nizova od n ishoda u kojima je i uspješno a $n-i$ neuspješno. Npr., ako je $n=3$, $i=2$ tada postoji $\binom{3}{2} = 3$ načina u kojima 3 ishoda kao rezultat imaju dva uspješna. Naime, bilo koji od 3 ishoda (s,s,f), (s,f,s), (f,s,s) gdje je izlaz

(s,s,f) značenja da su prva dva ishoda uspješna a da je treći neuspješan. Kako bilo koji od tri izlaza (s,s,f), (s,f,s) i (f,s,s) ima vjerovatnoću $p^2(1-p)$ pojavljivanja željena vjerovatnoća je time $\binom{3}{2}p^2(1-p)$.

Primjetimo da, prema binomnoj teoremi, suma vjerovatnoća je jedan, tj.

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = (p+(1-p))^n = 1$$

Pretpostavimo da sprovodimo eksperiment u kome bacamo 4 obična novčića. Ako pretpostavimo da su izlazi nezavisni, kolika je vjerovatnoća da se pojave dvije glave i dva pisma?

Rj:

P P G G

Koliko različitih nizova možemo formirati od 4 novčića u kojima će se pojaviti dva pisma i dvije glave

PPGG
PGPG
PGGP
GPPG
GPGP
GGPP

permutacija sa ponavljanjem

$$\overline{P}^{4}_{2;2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$$

Ako je vjerovatnoća pojave pisma $\frac{1}{2}$ a pojavi glave $\frac{1}{2}$, svaka od datih permutacija ima vjerovatnoću $\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Neka je X slučajna promjenjiva koja označava broj glava koje su se pojavile. Tada

$$P\{X=2\} = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

binomna slučajna varijabla sa parametrima $n=4$, $p=\frac{1}{2}$

Primijetimo da imamo

$$P\{X=0\} = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P\{X=1\} = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

$$P\{X=3\} = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

(#) Poznato je da će proizvod proizveden sa određenom mašinom biti defektan sa vjerovatnoćom od 0,1 nezavisno od bilo kojeg drugog proizvoda. Kolika je vjerovatnoća da će u uzorku od 3 proizvoda, najviše jedan biti defektan?

Rj.

Neka je X broj defektnih proizvoda u uzorku; posmatrajmo nezavisno slučajeve za $X=0$ i $X=1$

1° označimo sa (i) ispravan proizvod, i sa (d) defektan proizvod.

Koliko različitih nizova možemo formirati od 3 ispravna proizvoda

(i)(i)(i) $\overline{P}^{3}_{3;0} = \frac{3!}{3!\,0!} = 1 = \binom{3}{0}$

binomna slučajna varijabla

Time $P\{X=0\} = \binom{3}{0}(0,1)^0(0,9)^3 = 0,729$

2° (i) ispravan proizvod
(d) defektan proizvod

Koliko različitih nizova možemo formirati od 2 ispravna i jednog defektnog proizvoda

(d)(i)(i)
(i)(d)(i)
(i)(i)(d)

$\overline{P}^{3}_{2;1} = \frac{3!}{2!\,1!} = \binom{3}{1} = 3$

binomna slučajna varijabla

$P\{X=1\} = \binom{3}{1}(0,1)^1\cdot(0,9)^2 = 0,243$

Tražena vjerovatnoća je $P\{X\leq 1\} = 0,972$

(#) Pretpostavimo da će se motor aviona pokvariti u letu, sa vjerovatnoćom $1-p$, nezavisno od motora do motora; i predpostavimo da će avion uspješno letjeti ako najmanje 50 posto njegovih motora ostane u funkciji. Za koju vrijednost p će četvero-motorni avion biti poželjniji od dvo-motornog aviona?

Rj.

Prije nego što počnemo rješavati zadatak posmatrajmo četvero-motorni avion. On će uspješno preletjeti datu destinaciju ako mu u f-ji ostane 2, 3 ili 4 motora. Vjerovatnoća da četvero-motorni avion uspješno preleti željenu destinaciju sa dva pokvarena motora je

(N) - neispravan motor

(I) - ispravan motor

$$\binom{4}{2} p^2 (1-p)^2$$

(I)(I)(N)(N)

(I)(N)(I)(N)

(I)(N)(N)(I)

⋮

$$\overline{P}^{4}_{2;2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \binom{4}{2} = \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}_{\,1}} =$$

[binomna raspodjela]

Prema tome vjerovatnoća da će četvero-motorni avion uspješno preletjeti datu destinaciju je

$$\binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 + \binom{4}{3} p^3 (1-p) + \binom{4}{4} p^4 (1-p)^0 =$$

$$= 6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4$$

dok odgovarajuća vjerovatnoća za dvo-motorni avion je

$$\binom{2}{1}p(1-p)+\binom{2}{2}p^2(1-p)^0 = 2p(1-p)+p^2$$

Time je četvero-motorni avion sigurniji ako

$$6p^2(1-p)^2+4p^3(1-p)+p^4 \geq 2p(1-p)+p^2 \qquad /:p$$

$$6p(1-p)^2+4p^2(1-p)+p^3 \geq 2-p$$

⋮ ZA VJEŽBU KVADRIRATI, SABRATI I ODUZETI I PREBACITI SVE NA JEDNU STRANU

$$3p^3-8p^2+7p-2 \geq 0$$

$$(p-1)^2(3p-2) \geq 0$$

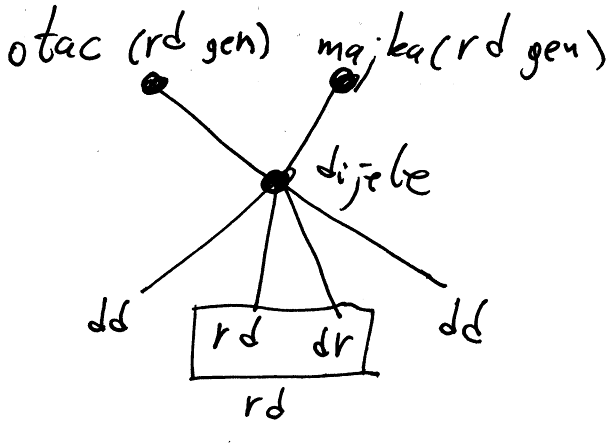
$$3p-2 \geq 0$$

$$p \geq \frac{2}{3}$$

Možemo zaključiti da će četvero-motorni avion biti sigurniji kada je vjerovatnoća uspješnosti motora najmanje $\frac{2}{3}$, dok je dvomotorni avion sigurniji kada ova vjerovatnoća pada ispod $\frac{2}{3}$.

(#) Pretpostavimo da je određeno obilježje osobe (kao što je boja očiju ili boja kose ili određena strana za služenje rukom) određeno na osnovu baze jednog para gena i pretpostavimo da d predstavlja dominantan gen a r recesivan gen. Time osoba sa dd genima je čisto dominantna, osoba sa rr je čista recesivna, a ona sa rd je hibrid (mješanac). Čisto dominantni i hibridi su slični u vanjskom izgledu. Djeca dobijaju jedan gen od svakog roditelja. Ako, u odnosu na određeno obilježje, dva hibrid roditelja imaju ukupno četvero djece, kolika je vjerovatnoća da tačno troje od četvero djece imaju vanjski izgled dominantnog gena?

Rj:



Ako predpostavimo da svako dijete ima jednaku mogućnost da naslijedi bilo koji od dva gena od bilo kojeg roditelja, vjerovatnoće da dijete od dva hibrid roditelja ima dd, rr ili rd par gena, su redom $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{2}$. Nama treba da vanjski izgled djeteta bude kao kod dominantnog gena, tj. ako je par gena ili dd ili rd.
(vjerovatnoća za dd ili rd je $\frac{3}{4}$).

T T T N
T T N T
T N T T
N T T T

binomna distribucija

$$\binom{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{27}{64}$$ tražena vjerovatnoća

Geometriska slučajna varijabla

Pretpostavimo da vršimo neka ispitivanja, od kojih svaki ima vjerovatnoću p da bude uspješan, i da ova ispitivanja vršimo sve dok se uspješan ishod ne pojavi. Ako sa X označimo broj ispitivanja koja vršimo sve dok se ne pojavi uspješan, tada za X kažemo da je geometriska slučajna promjenjiva sa parametrom p. Njena f-ja gustine vjerovatnoće je data sa

$$p(n) = P\{X=n\} = (1-p)^{n-1}p, \qquad n=1,2,\ldots$$

Ova jednakost slijedi zato što, da bi X bio jednak n potrebno je i dovoljno da prvih $n-1$ ispitivanja bude neuspješan a da n-ti ispit bude uspješan. Jednakost slijedi zato što smo za izhode uzastopnih ispitivanja pretpostavili da su nezavisni.

Da bi provjerili da je $p(n)$ f-ja gustine vjerovatnoće, primjetimo da

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1} = 1$$

Poissonova slučajna variabla

Za slučajna varijabla X, koja uzima jednu od vrijednosti $0, 1, 2, \ldots$, kažemo da je Poissonova slučajna varijabla sa parametrom λ, ako za neko $\lambda > 0$,

$$p(i) = P\{X = i\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, \ldots \qquad \ldots (1)$$

Jednakost (1) definiše f-ju gustine vjerovatnoće zato što je

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Poissonova slučajna varijabla ima širok vrlo primjena u različitim oblastima.

Važna osobina Poissonove slučajne varijable je ta što može biti korištena za aproksimaciju binomne slučajne varijable kada je binomni parametar n velik a p mali. Da bi vidjeli ovo, pretpostavimo da je X binomna slučajna varijabla sa parametrima (n, p), i neka je $\lambda = np$. Tada

$$P\{X = i\} = \frac{n!}{(n-i)!\, i!} p^i (1-p)^{n-i} =$$

$$= \frac{n!}{(n-i)!\, i!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{n^i} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i}$$

Sad, za n veliko i p malo

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}, \quad \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{n^i} \approx 1, \quad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1$$

Time za n veliko i p malo

$$P\{X=i\} \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

(#) Pretpostavimo da broj štamparskih grešaka na jednoj stranici neke knjige koju čitate ima Poissonovu distribuciju sa parametrom $\lambda = 1$. Izračunati vjerovatnoću da postoji najmanje jedna greška na trenutnoj stranici ~~koju čitate~~ te knjige.

Rj.

Za slučajnu varijablu sa Poissonovom distribucijom vrijedi

$$P\{X=0\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} \overset{\lambda=1}{=\!=} e^{-1}$$

$$P\{X=1\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} \overset{\lambda=1}{=\!=} e^{-1}$$

$$P\{X=2\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} = \frac{1}{2}e^{-1}$$

$$\vdots$$

Nama treba $P\{X \geq 1\}$.

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X=0\} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}633$$

Ako je broj nesreća koje se pojave na magistrali 5C svaki dan Poissonova slučajna varijabla sa parametrom $\lambda = 3$, kolika je vjerovatnoća da danas ne bude nesreća?

Rj.:

Za Poissonovu slučajnu varijablu X sa parametrom λ (gdje je $\lambda > 0$) vrijedi

$$P\{X = i\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Nama treba

$$P\{X = 0\} = e^{-3} \approx 0{,}05 .$$

Sedamnaest zadataka koji slijede ([68]-[84]) su posuđeni iz knjige "Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike", autora Silvia Gilezan, Ljubo Nedović, Zorana Lužanin, Zoran Ovcin, Tatjana Grbić, Jelena Ivetić, Biljana Mihailović, Ksenija Doroslovački, izdanje Novi Sad, 2009. godine

[68] *Firma na raspolaganju ima šest telefonskih linija. Neka je X broj linija zauzetih u određenom trenutku. Zakon raspodele za X dat je sa*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.1 & 0.15 & 0.2 & 0.25 & 0.2 & 0.06 & 0.04 \end{pmatrix}.$$

(a) *Izračunati verovatnoće sledećih događaja*
A - „bar tri linije su zauzete”, *C - „najmanje četiri linije nisu zauzete”,*
B - „manje od dve linije su zauzete”, *D - „zauzeto je između dve i pet linija”.*

(b) *Izračunati* $F_X(1.3)$, $F_X(3)$ *i* $F_X(4.6)$.

(c) *Naći funkciju raspodele* $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$ *i grafički je predstaviti.*

Rešenje:

(a) Tražene verovatnoće su:

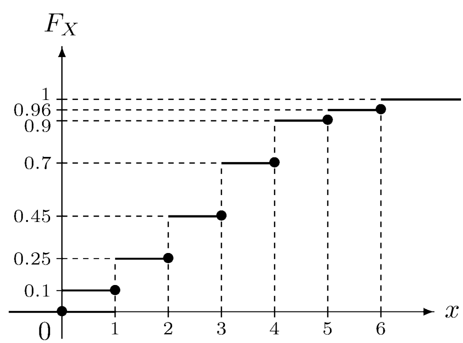
$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(X \geq 3) = \mathsf{P}(X=3) + \mathsf{P}(X=4) + \mathsf{P}(X=5) + \mathsf{P}(X=6) =$$
$$= 0.25 + 0.2 + 0.06 + 0.04 = 0.55,$$
$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(X < 2) = \mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=1) = 0.1 + 0.15 = 0.25,$$
$$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(X \leq 2) = \mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=1) + \mathsf{P}(X=2) =$$
$$= 0.1 + 0.15 + 0.2 = 0.45,$$
$$\mathsf{P}(D) = \mathsf{P}(2 \leq X \leq 5) =$$
$$= \mathsf{P}(X=2) + \mathsf{P}(X=3) + \mathsf{P}(X=4) + \mathsf{P}(X=5) =$$
$$= 0.2 + 0.25 + 0.2 + 0.06 = 0.71.$$

(b) Na osnovu (2.4) imamo da je

$$F_X(1.3) = \mathsf{P}(X < 1.3) = \mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=1) = 0.1 + 0.15 = 0.25,$$
$$F_X(3) = \mathsf{P}(X < 3) = \mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=1) + \mathsf{P}(X=2) =$$
$$= 0.1 + 0.15 + 0.2 = 0.45,$$
$$F_X(4.6) = \mathsf{P}(X < 4.6) =$$
$$= \mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=1) + \mathsf{P}(X=2) + \mathsf{P}(X=3) + \mathsf{P}(X=4) =$$
$$= 0.1 + 0.15 + 0.2 + 0.25 + 0.2 = 0.9.$$

(c) Primenjujući (2.4) određujemo funkciju raspodele i njen grafik

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0.1, & 0 < x \leq 1 \\ 0.25, & 1 < x \leq 2 \\ 0.45, & 2 < x \leq 3 \\ 0.7, & 3 < x \leq 4 \\ 0.9, & 4 < x \leq 5 \\ 0.96, & 5 < x \leq 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases},$$



[69] *Ako je* $\mathcal{R}_X = \{0,1,2,3,4\}$ *skup vrednosti slučajne promenljive* X*, i ako je* $\mathsf{P}(X=i) = c\,(5-i)$*, odrediti konstantu* c *tako da* X *bude slučajna promenljiva.*

Rešenje: Da bi X bila slučajna promenljiva neophodno je da važi $\mathsf{P}(X=x_i) \geq 0$ i (2.2). Kako je $0 \leq i \leq 4$ imamo da je $c \geq 0$. Koristeći uslov (2.2) dalje imamo $5c+4c+3c+2c+c=1$ odakle je $c=\frac{1}{15}$.

---

[70] *Neka je* X *broj guma koje nisu dovoljno napumpane na slučajno izabranom automobilu.*

(a) *Koja od tri ponuđene funkcije* P *određuje zakon raspodele za slučajnu promenljivu* X*.*

x_i	0	1	2	3	4
$\mathsf{P}(X=x_i)$	0.3	0.2	0.1	0.05	0.05
$\mathsf{P}(X=x_i)$	0.4	0.1	0.1	0.1	0.3
$\mathsf{P}(X=x_i)$	0.4	0.1	0.2	0.1	0.3

(b) *Za funkciju koja određuje zakon raspodele izračunati* $\mathsf{P}(2 \leq X \leq 4)$, $\mathsf{P}(X \leq 2)$ *i* $\mathsf{P}(X \neq 0)$.

(c) *Naći funkciju raspodele slučajne promenljive* X*.*

Rešenje:

(a) Za sve tri ponuđene funkcije važi da su nenegativne, tako da još treba proveriti u kom slučaju važi uslov (2.2). Za prvu funkciju je $\sum_{i=0}^{4} \mathsf{P}(X=x_i) = 0.7$, za drugu je $\sum_{i=0}^{4} \mathsf{P}(X=x_i) = 1$ i za treću $\sum_{i=0}^{4} \mathsf{P}(X=x_i) = 1.1$, tako da jedino druga funkcija određuje zakon raspodele slučajne promenljive X.

(b) Tražene verovatnoće su:

$\mathsf{P}(2 \leq X \leq 4) = \mathsf{P}(X=2) + \mathsf{P}(X=3) + \mathsf{P}(X=4) = 0.1+0.1+0.3 = 0.5,$

$\mathsf{P}(X \leq 2) = \mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=1) + \mathsf{P}(X=2) = 0.4+0.1+0.1 = 0.6,$

$\mathsf{P}(X \neq 0) = 1 - \mathsf{P}(X=0) = 1-0.4 = 0.6.$

(c) Funkcija raspodele $F_X(x) = \mathsf{P}(X<x)$, $x \in \mathbb{R}$ je $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0.4, & 0 < x \leq 1 \\ 0.5, & 1 < x \leq 2 \\ 0.6, & 2 < x \leq 3 \\ 0.7, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$.

---

[71] *Od izvođača radova se zahteva da podnesu jedan, dva, tri, četiri ili pet formulara (u zavisnosti od vrste posla) kod dobijanja građevinske dozvole. Neka je X broj formulara koji se zahteva od narednog podnesioca molbe. Verovatnoća da se zahteva i formulara je proporcionalna sa i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.*

(a) *Odrediti vrednost konstante proporcionalnosti.*

(b) *Izračunati verovatnoću da će najmanje tri formulara biti zahtevana.*

(c) *Izračunati verovatnoću da će broj formulara koji se zahtevaju biti između dva i četiri.*

(d) *Da li funkcija $\mathsf{P}(Y = i) = \frac{i^2}{50}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ može biti zakon raspodele slučajne promenljive Y?*

Rešenje:

(a) Na osnovu uslova zadatka verovatnoća da se zahteva i formulara proporcionalna je sa i, te je $\mathsf{P}(X = i) = k \cdot i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Na osnovu uslova nenegativnosti dobijamo da je $k \geq 0$, pa primenom (2.2) dobijamo $i + 2i + 3i + 4i + 5i = 1$, odakle je $i = \frac{1}{15}$.

(b) Tražena verovatnoća je

$\mathsf{P}(X \geq 3) = \mathsf{P}\,(X = 3) + \mathsf{P}\,(X = 4) + \mathsf{P}\,(X = 5) = \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{4}{5}$.

(c) Znači, $\mathsf{P}(2 \leq X \leq 4) = \mathsf{P}\,(X = 2) + \mathsf{P}\,(X = 3) + \mathsf{P}\,(X = 4) = \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{3}{5}$.

(d) Kako je $\sum\limits_{i=1}^{5} \frac{i^2}{50} = \frac{1+4+9+16+25}{50} = \frac{55}{50}$ na osnovu (2.2) data funkcija ne može biti zakon raspodele slučajne promenljive Y.

---

[74] *U kutiji se nalaze 4 bele i 6 zelenih kuglica. Pera izvlači jednu po jednu kuglicu bez vraćanja izvučene kuglice u kutiju sve dok ne izvuče zelenu kuglicu. Slučajna promenljiva X predstavlja broj izvedenih izvlačenja. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X i izračunati $F_{2X+1}(5)$ i $F_{X^2}(6)$.*

Rešenje: Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, a odgovarajuće verovatnoće su $\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(Z) = \frac{6}{10}$, $\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(BZ) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{4}{15}$, $\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(BBZ) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{1}{10}$, $\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(BBBZ) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{35}$, $\mathsf{P}(X = 5) = \mathsf{P}(BBBB) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{210}$, gde je sa B označen događaj „*izvučena je bela kuglica*" i sa Z događaj „*izvučena je zelena kuglica*". Traženi zakon raspodele je
$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{10} & \frac{4}{15} & \frac{1}{10} & \frac{1}{35} & \frac{1}{210} \end{pmatrix}$.
Primenom definicije funkcije raspodele dobija se

$F_{2X+1}(5) = \mathsf{P}(2X + 1 < 5) = \mathsf{P}(X < 2) = \mathsf{P}(X = 1) = \frac{6}{10}$,

$F_{X^2}(6) = \mathsf{P}(X^2 < 6) = \mathsf{P}(-\sqrt{6} < X < \sqrt{6}) = \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) = \frac{13}{15}$.

---

[72] *U kutiji se nalaze tri kuglice označene brojem* 1, *četiri kuglice označene brojem* 2 *i dve kuglice označene brojem* 3. *Na slučajan način izvlačimo jednu kuglicu iz kutije. Neka je* X *slučajna promenljiva koja predstavlja izvučeni broj.*

(a) *Naći zakon raspodele slučajne promenljive* X.

(b) *Izračunati* $F_X(2.5)$, $F_X(-1)$, $F_X(2)$ *i* $F_X(5)$.

(c) *Naći funkciju raspodele,* $F_X(x)$, *za slučajnu promenljivu* X *i grafički je predstaviti.*

Rešenje:

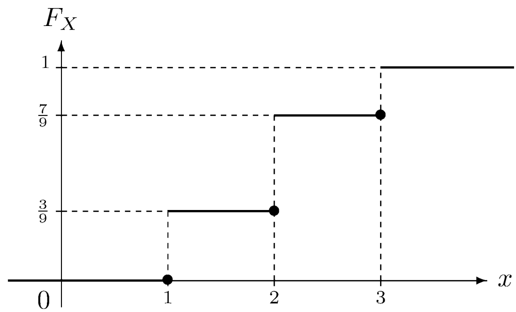
(a) Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3\}$, pri čemu su odgovarajuće verovatnoće $\mathsf{P}(X = 1) = \frac{3}{9}$, $\mathsf{P}(X = 2) = \frac{4}{9}$ i $\mathsf{P}(X = 3) = \frac{2}{9}$. Znači, traženi zakon raspodele slučajne promenljive X je $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

(b) Na osnovu (2.4) imamo da je

$$\begin{aligned}
&F_X(2.5) = \mathsf{P}(X < 2.5) = \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) = \tfrac{3}{9} + \tfrac{4}{9} = \tfrac{7}{9},\\
&F_X(-1) = \mathsf{P}(X < -1) = 0,\\
&F_X(2) = \mathsf{P}(X < 2) = \mathsf{P}(X = 1) = \tfrac{3}{9},\\
&F_X(5) = \mathsf{P}(X < 5) = \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) = \tfrac{3}{9} + \tfrac{4}{9} + \tfrac{2}{9} = 1.
\end{aligned}$$

(c) Tražena funkcija raspodele $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$ i njen grafik su

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{3}{9}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{7}{9}, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases},$$



---

[75] *Biljana baca kockicu za „Ne ljuti se čoveče". Slučajna promenljiva* X *predstavlja vrednost ostatka pri deljenju palog broja sa 4. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive* X.

Rešenje: Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, 3\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(X = 0) = \mathsf{P}($„*prilikom bacanja kockice pojavio se broj* 4"$) = \frac{1}{6}$,

$\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}($„*prilikom bacanja kockice pojavio se broj* 1 *ili broj* 5"$) = \frac{2}{6}$,

$\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}($„*prilikom bacanja kockice pojavio se broj* 2 *ili broj* 6"$) = \frac{2}{6}$,

$\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}($„*prilikom bacanja kockice pojavio se broj* 3"$) = \frac{1}{6}$,

tako da je $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

---

[73] *U kutiji se nalaze dve kuglice označene brojem 1, četiri kuglice označene brojem 3, i jedna kuglica označena brojem 5. Na slučajan način izvlačimo odjednom dve kuglice iz kutije. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja zbir izvučenih brojeva.*

(a) *Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.*

(b) *Izračunati $F_X(2)$, $F_X(4)$, $F_X(8)$ i $F_X(16.375)$.*

(c) *Naći funkciju raspodele, $F_X(x)$, za slučajnu promenljivu X i grafički je predstaviti.*

Rešenje:

(a) Označimo sa $k_{\{m,n\}}$, $m,n \in \{1,3,5\}$ događaj „izvučene su kuglice sa brojevima m i n" (pri čemu je nebitan redosled izvučenih kuglica). Slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\{2,4,6,8\}$ pri čemu je

$\mathsf{P}(X=2) = \mathsf{P}(k_{\{1,1\}}) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{21}$,

$\mathsf{P}(X=4) = \mathsf{P}(k_{\{1,3\}}) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{8}{21}$,

$\mathsf{P}(X=6) = \mathsf{P}(k_{\{1,5\}} \cup k_{\{3,3\}}) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}+\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{8}{21}$ i

$\mathsf{P}(X=8) = \mathsf{P}(k_{\{3,5\}}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{4}{21}$,

tako da je $X : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ \frac{1}{21} & \frac{8}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix}$.

(b) Koristeći (2.4) imamo:

$F_X(2) = \mathsf{P}(X<2) = 0$,

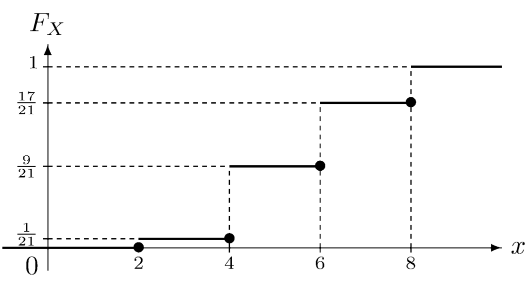
$F_X(4) = \mathsf{P}(X<4) = \mathsf{P}(X=2) = \frac{1}{21}$,

$F_X(8) = \mathsf{P}(X<8) = 1 - \mathsf{P}(X=8) = 1 - \frac{4}{21} = \frac{17}{21}$,

$F_X(16.375) = \mathsf{P}(X<16.375) = 1$.

(c) Funkcija raspodele slučajne promenljive X i njen grafik su

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \frac{1}{21}, & 2 < x \le 4 \\ \frac{9}{21}, & 4 < x \le 6 \\ \frac{17}{21}, & 6 < x \le 8 \\ 1, & x > 8 \end{cases},$$



[76] *U kutiji se nalaze p kuglica označenih brojem 2 i q kuglica označenih brojem 3* $(p, q \geq 2)$.

(a) *Izvlači se jedna kuglica. Slučajna promenljiva* X *predstavlja izvučeni broj. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive* X.

(b) *Izvlače se dve kuglice odjednom. Slučajna promenljiva* Y *predstavlja zbir izvučenih brojeva. Naći zakon raspodele slučajne promenljive* Y.

Rešenje:

(a) Slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\{2, 3\}$, a odgovarajuće verovatnoće su $\mathsf{P}(X = 2) = \frac{p}{p+q}$ i $\mathsf{P}(X = 3) = \frac{q}{p+q}$, tako da je $X : \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \frac{p}{p+q} & \frac{q}{p+q} \end{pmatrix}$.

(b) Skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{4, 6, 9\}$, a odgovarajuće verovatnoće su $\mathsf{P}(Y = 4) = \frac{\binom{p}{2}}{\binom{p+q}{2}} = \frac{p(p-1)}{(p+q)(p+q-1)}$, $\mathsf{P}(Y = 6) = \frac{\binom{p}{1}\binom{q}{1}}{\binom{p+q}{2}} = \frac{2pq}{(p+q)(p+q-1)}$ i $\mathsf{P}(Y = 9) = \frac{\binom{q}{2}}{\binom{p+q}{2}} = \frac{q(q-1)}{(p+q)(p+q-1)}$ tako da je traženi zakon raspodele $Y : \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ \frac{p(p-1)}{(p+q)(p+q-1)} & \frac{2pq}{(p+q)(p+q-1)} & \frac{q(q-1)}{(p+q)(p+q-1)} \end{pmatrix}$.

---

[77] *U kutiji se nalazi 5 crvenih i 3 bele kuglice. Slavica izvlači tri kuglice istovremeno. Slučajna promenljiva* X *predstavlja broj izvučenih belih kuglica. Naći zakon raspodele slučajne promenljive* X.

Rešenje: Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, 3\}$ i $\mathsf{P}(X = 0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{10}{56}$, $\mathsf{P}(X = 1) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{30}{56}$, $\mathsf{P}(X = 2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{56}$ i $\mathsf{P}(X = 3) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56}$, tako da je traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{10}{56} & \frac{30}{56} & \frac{15}{56} & \frac{1}{56} \end{pmatrix}$.

---

[82] *Strelac gađa metu tri puta. Verovatnoća pogotka u svakom nezavisnom gađanju je* 0.9. *Ako je meta pogođena najviše jedanom strelac dobija -5 poena, ako ostvari dva pogotka dobija 5 poena, a u preostalom slučaju 10 poena. Slučajna promenljiva* X *predstavlja broj osvojenih poena. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive* X.

Rešenje: Na osnovu uslova zadatka skup vrednosti tražene slučajne promenljive je $\mathcal{R}_X = \{-5, 5, 10\}$, a dogovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(X = -5) = \mathsf{P}($„*Strelac ima* 3 *promašaja ili* 2 *promašaja i* 1 *pogodak* ”$) = 0.1^3 + \binom{3}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9 = 0.028$, $\mathsf{P}(X = 5) = \mathsf{P}($„*Strelac ima* 2 *pogotka i* 1 *promašaj*”$) = \binom{3}{2} \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 = 0.243$ i $\mathsf{P}(X = 10) = \mathsf{P}($„*Strelac ima* 3 *pogotka*”$) = 0.9^3 = 0.729$, tako da je $X : \begin{pmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 0.028 & 0.243 & 0.729 \end{pmatrix}$.

---

[78] *Kockica se baca do prve pojave šestice ali najviše četiri puta. Neka slučajna promenljiva X predstavlja ukupan broj izvedenih bacanja.*

(a) *Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.*

(b) *Izračunati* $\mathsf{P}(2 \leq X < 4)$, $\mathsf{P}(2 < X < 4)$ *i* $\mathsf{P}(X < 3.)$

(c) *Naći funkciju raspodele slučajne promenljive X.*

Rešenje: Označimo sa D događaj da se u jednom bacanju kockice pojavi broj 6, a sa $\bar{D}$ da se u jednom bacanju kockice ne pojavi broj 6. Tada je $\mathsf{P}(D) = \frac{1}{6}$ i $\mathsf{P}(\bar{D}) = \frac{5}{6}$. Primetimo da su bacanja kockice međusobno nezavisna.

(a) Očigledno je da je $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3, 4\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$$\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(D) = \tfrac{1}{6},$$
$$\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(\bar{D}D) = \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{5}{36},$$
$$\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(\bar{D}\bar{D}D) = \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{25}{216},$$
$$\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(\bar{D}\bar{D}\bar{D}D + \bar{D}\bar{D}\bar{D}\bar{D}) = \mathsf{P}(\bar{D}\bar{D}\bar{D}) = \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{5}{6} = \tfrac{125}{216},$$

tako da je traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{25}{216} & \frac{125}{216} \end{pmatrix}$.

(b) Tražene verovatnoće su

$$\mathsf{P}(2 \leq X < 4) = \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) = \tfrac{5}{36} + \tfrac{25}{216} = \tfrac{55}{216},$$
$$\mathsf{P}(2 < X < 4) = \mathsf{P}(X = 3) = \tfrac{25}{216},$$
$$\mathsf{P}(X < 3) = \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{36} = \tfrac{11}{36}.$$

(c) Primenjujući (2.4) dobijamo da je $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{6}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{11}{36}, & 2 < x \leq 3 \\ \frac{91}{216}, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$.

---

[79] *Četiri osobe izvlače na slučajan način, jedna za drugom, po jednu šibicu od četiri ponuđene, od kojih je jedna kraća od ostalih. Izvučena šibica i osoba koja ju je izvukla se ne vraćaju u igru. Slučajna promenljiva X predstavlja redni broj izvlačenja u kojem je izvučena kraća šibica. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.*

Rešenje: Slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$. Označimo sa K_i događaj „*u i-tom izvlačenju je izvučena kraća šibica*", $i = 1, 2, 3, 4$. Iz $\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(K_1) = \frac{1}{4}$, $\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(\overline{K_1}K_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, $\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(\overline{K_1}\ \overline{K_2}K_3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ i $\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(\overline{K_1}\ \overline{K_2}\ \overline{K_3}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ dobija se traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

---

[80] *U kutiji se nalazi 5 belih i 3 zelene kuglice. Zoran na slučajan način izvlači jednu po jednu kuglicu*

(a) *bez vraćanja*

(b) *sa vraćanjem*

dok ne izvuče kuglicu zelene boje. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvlačenja.

Rešenje: Označimo sa B događaj „*izvučena je bela kuglica*" i sa Z događaj „*izvučena je zelena kuglica*".

(a) Broj izvlačenja može biti $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tako da je traženi zakon raspodele X : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{3}{8} & \frac{15}{56} & \frac{5}{28} & \frac{3}{28} & \frac{3}{56} & \frac{1}{56} \end{pmatrix}$, gde je $\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(Z) = \frac{3}{8}$, $\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(BZ) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$, $\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(BBZ) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$, $\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(BBBZ) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{28}$, $\mathsf{P}(X = 5) = \mathsf{P}(BBBBZ) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{56}$ i $\mathsf{P}(X = 6) = \mathsf{P}(BBBBB) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{56}$.

(b) Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$. Kako se izvlačenja vrše sa vraćanjem dalje imamo $\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(Z) = \frac{3}{8}$, $\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(BZ) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8}$, $\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(BBZ) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8}$, $\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(BBBZ) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8}, \ldots$ tako da slučajna promenljiva X ima geometrijsku $\mathcal{G}(\frac{3}{8})$ raspodelu.

---

[83] *Dinar se baca dok se prvi put ne pojavi grb ali najviše pet puta. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvedenih bacanja.*

Rešenje: Kako je $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i

$$\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(G_1) = \frac{1}{2},$$
$$\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(P_1 G_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$
$$\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(P_1 P_2 G_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$
$$\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(P_1 P_2 P_3 G_4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16},$$
$$\mathsf{P}(X = 5) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16},$$

gde je sa G_i i P_i označena pojava grba, odnosno pisma u i-tom bacanju ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) imamo da je traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

---

[81] *Dinar se baca tri puta. Slučajna promenljiva X predstavlja broj palih grbova, a slučajna promenljiva Y uzima vrednost 1 ako je palo više grbova, a -1 ako je palo više pisama. Naći zakone raspodela slučajnih promenljivih X i Y.*

Rešenje: Označimo sa P_i i G_i događaje „*u i-tom bacanju dinara palo pismo, odnosno grb*", gde $i \in \{1,2,3\}$. Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{0,1,2,3\}$, a skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{-1,1\}$. Kako su bacanja dinara međusobno nezavisna imamo da je

$$\mathsf{P}(X=0) = \mathsf{P}(P_1P_2P_3) = \mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(P_3) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8},$$

$$\mathsf{P}(X=1) = \mathsf{P}(G_1P_2P_3 + P_1G_2P_3 + P_1P_2G_3) =$$
$$= \mathsf{P}(G_1P_2P_3) + \mathsf{P}(P_1G_2P_3) + \mathsf{P}(P_1P_2G_3) =$$
$$= \mathsf{P}(G_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(P_3) + \mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(G_2)\,\mathsf{P}(P_3) + \mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(G_3) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{8}.$$

Analogno se dobija da je $\mathsf{P}(X=2) = \frac{3}{8}$ i $\mathsf{P}(X=3) = \frac{1}{8}$. Za slučajnu promenljivu Y imamo da je

$$\mathsf{P}(Y=-1) = \mathsf{P}(P_1P_2P_3 + P_1P_2G_3 + P_1G_2P_3 + G_1P_2P_3) =$$
$$= \mathsf{P}(P_1P_2P_3) + \mathsf{P}(P_1P_2G_3) + \mathsf{P}(P_1G_2P_3) + \mathsf{P}(G_1P_2P_3) =$$
$$= \mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(P_3) + \mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(G_3) + \mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(G_2)\,\mathsf{P}(P_3) + \mathsf{P}(G_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(P_3) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2},$$

$$\mathsf{P}(Y=1) = 1 - \mathsf{P}(Y=-1) = \tfrac{1}{2}.$$

Tražene slučajne promenljive su $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ i $Y : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

---

[84] *U kutiji se nalaze 2 zelene i 3 bele kuglice. Ksenija na slučajan način izvlači jednu po jednu kuglicu*

(a) *sa vraćanjem dok ne izvuče kuglicu zelene boje ali najviše 5 puta,*

(b) *bez vraćanja dok ne izvuče kuglicu zelene boje.*

Naći zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvlačenja.

Rešenje: Označimo sa B događaj „*izvučena je bela kuglica*" i sa Z događaj „*izvučena je zelena kuglica*".

(a) Broj izvlačenja može biti $1,2,3,4,5$. Odgovarajuće verovatnoće su $\mathsf{P}(X=1) = \mathsf{P}(Z) = \frac{2}{5}$, $\mathsf{P}(X=2) = \mathsf{P}(BZ) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{25}$, $\mathsf{P}(X=3) = \mathsf{P}(BBZ) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{18}{125}$, $\mathsf{P}(X=4) = \mathsf{P}(BBBZ) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{54}{625}$ i $\mathsf{P}(X=5) = \mathsf{P}(BBBB) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{81}{625}$, tako da je $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{25} & \frac{18}{125} & \frac{54}{625} & \frac{81}{625} \end{pmatrix}$.

(b) Kad Ksenija izvlači kuglice bez vraćanja skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{1,2,3,4\}$, a odgovarajuće verovatnoće su $\mathsf{P}(X=1) = \mathsf{P}(Z) = \frac{2}{5}$, $\mathsf{P}(X=2) = \mathsf{P}(BZ) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $\mathsf{P}(X=3) = \mathsf{P}(BBZ) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{5}$ i $\mathsf{P}(X=4) = \mathsf{P}(BBB) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{10}$ i traženi zakon raspodele je $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$.
